LOGIK II

PD DR. J. BROMAND

- Universität Bonn, Institut für Philosophie, Sommersemester 2009 Übung 501000113, Bachelor of Arts, 1. Studienjahr, Modul *Logik und Grundlagen*, Mo. 14 – 16 Uhr, MiÜR, Beginn: 20. April

- **Seminarplan**

20. 04.	*Vorbesprechung*	
27. 04.	Mengentheorie	[Kap. 15]
04. 05.	Russells Kennzeichnungstheorie	[Kap. 14]
11. 05.	Generalisierte Quantoren	[Kap. 14]
18. 05.	Induktion	[Kap. 16]
25. 05.	Aussagenlogik für Fortgeschrittene	[Kap. 17]
01. 06.	*fällt aus* (*Pfingsten*)	
08. 06.	Prädikatenlogik für Fortgeschrittene	[Kap. 18]
15. 06.	Vollständigkeit & Korrektheit (I)	[Kap. 19]
22. 06.	Vollständigkeit und Korrektheit (II)	[Kap. 19]
29. 06.	*Rekapitulation & Klausurvorbereitung*	[Kap. 19]
06. 07.	*Abschlussklausur*	
13. 07.	Ausblick: Gödels Unvollständigkeitssätze und und weitere limitative Theoreme	[Kap. 19]

Die eingeklammerten Kapitelangaben beziehen sich auf die Textgrundlage des Seminars. Es ist notwendig, die angegebenen Kapitel *vor* den entsprechenden Seminarsitzungen durchzuarbeiten!

Exkurse anlässlich von (sprach-)philosophischen Anknüpfungspunkten:

- Philosophische Konsequenzen von CANTORS Theorem
- Bertrand RUSSELLS Theorie definiter Kennzeichnungen *vs.* Präsuppositionen
- Von ARISTOTELES' Syllogistik zu den generalisierten Quantoren
- Paul GRICES Theorie der Implikaturen
- Gottlob FREGE über Sinn und Bedeutung

- **Textgrundlage** der Übung ist der folgende Text:

  Jon BARWISE & John ETCHEMENDY, *Sprache, Beweis und Logik. Band II: Anwendungen und Metatheorie*, Paderborn: Mentis 2006.

- Es besteht die Möglichkeit, eine Text und Übung begleitende **Software** zu erwerben. Diese ist zur Teilnahme nicht *unbedingt* erforderlich, aber in jedem Falle sehr hilfreich: Die Software trägt zur Veranschaulichung des Stoffs bei, ermöglicht es Ihnen, selbständig mit Beweistechniken zu experimentieren und gibt unmittelbares Feedback für viele Übungen:

  Jon BARWISE & John ETCHEMENDY, *Sprache, Beweis und Logik. CD-ROM*, Paderborn: Mentis 2006.

- Die zur Veranstaltung wöchentlich vergebenen Übungsaufgaben werden in einer begleitenden (nicht aber obligatorischen) **Übung** besprochen:

  Übungen zu Logik II, Mo. 12 – 14 Uhr, MiÜR, Beginn: 27. April

- **Kopiervorlagen** der verwendeten Handouts finden sich unter: *www.uni-bonn.de/www/IPHIL/Mitarbeiter/Bromand/Logik2.html*

- **Leistungspunkte**: 3 LP für aktive Teilnahme (regelmäßige Teilnahme + Einreichen von Übungen) + 2 LP bei Bestehen der Abschlussklausur.

- **Sprechstunde**
  Freitag, 14 – 15 Uhr & n.V. in Zimmer 1.092;
  Tel.: (0228) 73 – 7588; E-Mail: *bromand@uni-bonn.de*

Rückblick I: Ableitungsregeln für AL

1. Das System $\mathcal{F}_T$

- Eine Alternative zu axiomatischen Kalkülen stellen die sog. Regelkalküle dar. Letztere werden *nur* durch die Angabe von Ableitungsregeln bestimmt (ohne die Angabe von Axiomen).
  Im Folgenden wird als Beispiel eines solchen Regelkalküls für die AL das auf Frederic Fitch zurückgehende System $\mathcal{F}_T$ vorgestellt—
  auch bekannt als *Kalkül des natürlichen Schließens*.
- Eine Ableitung bzw. ein Beweis einer Konklusion S aus den Prämissen $\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n$ in $\mathcal{F}_T$ ist eine Folge von Sätzen der folgenden Form (allerdings gibt es auch Beweise *ohne* Prämissen):

$$
\begin{array}{|ll}
\mathsf{P}_1 & \text{Annahme} \\
\vdots & \quad\vdots \\
\mathsf{P}_n & \text{Annahme} \\
\hline
\mathsf{S}_1 & \textit{Rechtfertigung } 1 \\
\vdots & \quad\vdots \\
\mathsf{S}_n & \textit{Rechtfertigung } n \\
\mathsf{S} & \textit{Rechtfertigung } n+1
\end{array}
$$

  $\mathsf{S}_1, \ldots, \mathsf{S}_n$ sind dabei Zwischenschritte, welche mit Hilfe bestimmter Regeln zu rechtfertigen sind. Die horizontale Linie trennt dabei die Annahmen von den mit ihrer Hilfe hergeleiteten Sätzen.
- Die folgenden Regeln geben dabei an, welche Sätze abgeleitet werden können, sobald bestimmte Sätze gegeben sind. So kann der Satz $\mathsf{P}_1 \vee \ldots \vee \mathsf{P}_i \vee \ldots \vee \mathsf{P}_n$ etwa aus P_i hergeleitet werden und der Satz $\mathsf{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{P}_n$ kann abgeleitet werden, sobald P_1 bis P_n gegeben sind.
- Wird ein Hilfsbeweis als Teil einer Ableitung unter bestimmten zusätzlichen Annahmen geführt, werden die zusätzlichen Annahmen wie oben

mit einem horizontalen Strich abgegrenzt. Die mit ihrer Hilfe hergeleiteten Sätze werden rechts neben einer weiteren vertikalen Linie unter den Zusatzannahmen eingerückt. So muss man etwa, um S aus $\mathsf{P}_1 \vee \ldots \vee \mathsf{P}_n$ herzuleiten, zuvor S jeweils unter Voraussetzung von P_1 bis P_n herleiten (Regel *Disjunktionsbeseitigung*).

- Der Einfachheit halber wird das Zeichen „$\perp$“ („*falsum*“) eingeführt, welches einen Widerspruch (wie etwa $\mathsf{P} \wedge \neg\mathsf{P}$) symbolisieren soll.
  $\perp$ kann als 0-stelliges Verknüpfungssymbol verstanden werden.

- **Konjunktions-Einführung**

$$
\begin{array}{r|l}
 & \mathsf{P}_1 \\
 & \Downarrow \\
 & \mathsf{P}_n \\
 & \vdots \\
\triangleright & \mathsf{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{P}_n
\end{array}
$$

- **Konjunktions-Beseitigung**

$$
\begin{array}{r|l}
 & \mathsf{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{P}_i \wedge \ldots \wedge \mathsf{P}_n \\
 & \vdots \\
\triangleright & \mathsf{P}_i
\end{array}
$$

- **Disjunktions-Einführung**

$$
\begin{array}{r|l}
 & \mathsf{P}_i \\
 & \vdots \\
\triangleright & \mathsf{P}_1 \vee \ldots \vee \mathsf{P}_i \vee \ldots \vee \mathsf{P}_n
\end{array}
$$

- **Disjunktions-Beseitigung**

$$
\begin{array}{r|l}
 & \mathsf{P}_1 \vee \ldots \vee \mathsf{P}_n \\
 & \vdots \\
 & \begin{array}{|l} \mathsf{P}_1 \\ \hline \vdots \\ \mathsf{S} \end{array} \\
 & \quad\Downarrow \\
 & \begin{array}{|l} \mathsf{P}_n \\ \hline \vdots \\ \mathsf{S} \end{array} \\
 & \vdots \\
\triangleright & \mathsf{S}
\end{array}
$$

- **Reiteration**

$$
\begin{array}{r|l}
 & \mathsf{P} \\
 & \vdots \\
\triangleright & \mathsf{P}
\end{array}
$$

- **Negations-Einführung**

$$
\begin{array}{r|l}
 & \begin{array}{|l} \mathsf{P} \\ \hline \vdots \\ \perp \end{array} \\
\triangleright & \neg\mathsf{P}
\end{array}
$$

- **Negations-Beseitigung**

$$
\begin{array}{r|l}
 & \neg\neg\mathsf{P} \\
 & \vdots \\
\triangleright & \mathsf{P}
\end{array}
$$

- **⊥-Einführung**

$$\begin{array}{r|l} & P \\ & \vdots \\ & \neg P \\ & \vdots \\ \rhd & \bot \end{array}$$

- **⊥-Beseitigung**

$$\begin{array}{r|l} & \bot \\ & \vdots \\ \rhd & P \end{array}$$

- **Konditional-Einführung**

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{|l} \underline{P} \\ \vdots \\ Q \end{array} \\ \rhd & P \to Q \end{array}$$

- **Konditional-Beseitigung**

$$\begin{array}{r|l} & P \to Q \\ & \vdots \\ & P \\ & \vdots \\ \rhd & Q \end{array}$$

- **Bikonditional-Einführung**

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{|l} \underline{P} \\ \vdots \\ Q \end{array} \\ & \vdots \\ & \begin{array}{|l} \underline{Q} \\ \vdots \\ P \end{array} \\ \rhd & P \leftrightarrow Q \end{array}$$

- **Bikonditional-Beseitigung**

$$\begin{array}{r|l} & P \leftrightarrow Q \quad (\text{oder } Q \leftrightarrow P) \\ & \vdots \\ & P \\ & \vdots \\ \rhd & Q \end{array}$$

- Die verwendete Notation

$$\begin{array}{l} P_1 \\ \Downarrow \\ P_n \end{array}$$

besagt dabei etwa im Falle der Konjunktionseinführung, dass P_1 bis P_n im Beweis (evtl. ‚verstreut') auftreten müssen (egal in welcher Reihenfolge), bevor die Konjunktion $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n$ eingeführt werden darf. Im Falle der Disjunktionsbeseitigung müssen entsprechend die genannten Hilfsbeweise vor der Anwendung der Regel erbracht worden sein.

- Der Regel der Disjunktionsbeseitigung entspricht dem bekannten Verfahren eines Beweis durch *Fallunterscheidung*, die Regel der Negationseinführung entspricht dem *indirekten Beweis* bzw. dem *Beweis durch Widerspruch* und wird häufig auch als *reductio ad absurdum* bezeichnet. Der ⊥-Beseitigung entspricht das Prinzip *ex contradictione quodlibet*, welches häufig auch *ex falso quodlibet* genannt wird. Der Konditionalbeseitigung entspricht *Modus ponens* und die Konditionaleinführung wird auch *Konditionalisierung* genannt.

- Gibt es in $\mathcal{F}_T$ eine Ableitung des Satzes S aus den Prämissen $P_1, \ldots, P_n$ (bzw. aus der Prämissenmenge $\Gamma = \{P_1, \ldots, P_n\}$), notiert man dies auch folgendermaßen: $P_1, \ldots, P_n \vdash_T S$. bzw. $\Gamma \vdash_T S$.

  Kann S in $\mathcal{F}_T$ ohne Prämissen bewiesen werden, notiert man: $\vdash_T S$ bzw. $\varnothing \vdash_T S$.

  Beispiel: $P \to (P \to Q) \vdash_T P \to Q$

$$\begin{array}{l|ll} 1 & \underline{P \to (P \to Q)} & \textbf{Ann.} \\ 2 & \quad \begin{array}{|l} \underline{P} \\ P \to (P \to Q) \\ P \to Q \\ Q \end{array} & \begin{array}{l} \textbf{Ann.} \\ \textbf{Reit}: 1 \\ \to \textbf{Elim}: 2, 3 \\ \to \textbf{Elim}: 2, 4 \end{array} \\ 6 & P \to Q & \to \textbf{Intro}: 2\text{–}5 \end{array}$$

Rückblick 2: Ableitungsregeln für PL

1. Das System $\mathcal{F}$

- Das System $\mathcal{F}$ umfasst neben den aussagenlogischen Regeln von $\mathcal{F}_T$ auch Regeln für die Quantoren $\forall$ und $\exists$ sowie Regeln für die Identitätsrelation $=$.

  - **Allquantor-Einführung**

    $\boxed{\mathsf{c}}$ $\mathsf{P(c)}$
    $\vdots$
    $\mathsf{Q(c)}$
    $\triangleright$ $\forall \mathsf{x}\,(\mathsf{P(x)} \to \mathsf{Q(x)})$

  - **Allquantor-Beseitigung**

    $\forall \mathsf{x}\, \mathsf{S(x)}$
    $\vdots$
    $\triangleright$ $\mathsf{S(c)}$

  - **Allquantor-Einführung**

    $\boxed{\mathsf{c}}$
    $\vdots$
    $\mathsf{P(c)}$
    $\triangleright$ $\forall \mathsf{x}\, \mathsf{P(x)}$

    Das Symbol $\boxed{\mathsf{c}}$ über den Teilbeweisen soll dabei anzeigen, dass der Name „c“ nicht außerhalb des Teilbeweises auftreten darf!

  - **Existenzquantor-Einführung**

    $\mathsf{S(c)}$
    $\vdots$
    $\triangleright$ $\exists \mathsf{x}\, \mathsf{S(x)}$

  - **Existenzquantor-Beseitigung**

    $\exists \mathsf{x}\, \mathsf{S(x)}$
    $\vdots$
    $\boxed{\mathsf{c}}$ $\mathsf{S(c)}$
    $\vdots$
    Q
    $\triangleright$ Q

- Die Regel der Allquantorbeseitigung wird gelegentlich auch *universelle Instantiierung* oder auch *universelle Spezialisierung* genannt; im Falle

der Regel der Existenzquantorbeseitigung spricht man auch von *existenzieller Instantiierung* bzw. *existenzieller Spezialisierung*.
Die Regeln der Allquantor- bzw. Existenzquantoreinführung werden auch als *universelle* bzw. *existenzielle Generalisierung* bezeichnet.

- Die Regeln für die Identitätsrelation $=$ sind die folgenden:

  - **Identitäts-Einführung**

    $\triangleright$ $\mathsf{n} = \mathsf{n}$

  - **Identitäts-Beseitigung**

    $\mathsf{P(n)}$
    $\vdots$
    $\mathsf{n} = \mathsf{m}$
    $\vdots$
    $\triangleright$ $\mathsf{P(m)}$

- Gibt es in $\mathcal{F}$ eine Ableitung des Satzes S aus den Prämissen $\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n$ (bzw. aus der Prämissenmenge $\Gamma = \{\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n\}$), notiert man dies auch folgendermaßen: $\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n \vdash \mathsf{S}$. bzw. $\Gamma \vdash \mathsf{S}$.

  Kann S in $\mathcal{F}$ ohne Prämissen bewiesen werden, notiert man:
  $\vdash \mathsf{S}$ bzw. $\varnothing \vdash \mathsf{S}$.

  Beispiel: $\neg\forall \mathsf{x}\, \mathsf{P(x)} \vdash \exists \mathsf{x}\, \neg \mathsf{P(x)}$

1	$\neg\forall \mathsf{x}\, \mathsf{P(x)}$	**Ann.**
2	$\neg\exists \mathsf{x}\, \neg\mathsf{P(x)}$	**Ann.**
3	$\boxed{\mathsf{c}}$	
4	$\neg\mathsf{P(c)}$	**Ann.**
5	$\exists \mathsf{x}\, \neg\mathsf{P(x)}$	$\exists$ **Intro**: 4
6	$\bot$	$\bot$ **Intro**: 2, 5
7	$\neg\neg\mathsf{P(c)}$	$\neg$ **Intro**: 4 – 6
8	$\mathsf{P(c)}$	$\neg$ **Elim**: 7
9	$\forall \mathsf{x}\, \mathsf{P(x)}$	$\forall$ **Intro**: 3 – 8
10	$\bot$	$\bot$ **Intro**: 1, 9
11	$\neg\neg\exists \mathsf{x}\, \neg\mathsf{P(x)}$	$\neg$ **Intro**: 2 – 10
12	$\exists \mathsf{x}\, \neg\mathsf{P(x)}$	$\neg$ **Elim**: 11

Aufgaben

1 Beweisen Sie die folgenden Behauptungen!

a) $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}, \mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R} \vdash_{\mathrm{T}} \mathsf{P} \rightarrow \mathsf{R}$

b) $\mathsf{P} \rightarrow (\mathsf{Q} \wedge \neg \mathsf{Q}) \vdash_{\mathrm{T}} \neg \mathsf{P}$

c) $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q} \vdash_{\mathrm{T}} \neg \mathsf{Q} \rightarrow \neg \mathsf{P}$

d) $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{R}, \mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R} \vdash_{\mathrm{T}} (\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}) \rightarrow \mathsf{R}$

e) $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}, \neg \mathsf{Q} \vdash_{\mathrm{T}} \neg \mathsf{P}$

f) $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{R}, \mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{S} \vdash_{\mathrm{T}} (\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}) \rightarrow (\mathsf{R} \vee \mathsf{S})$

g) $\neg \mathsf{P} \vee \neg \mathsf{Q} \vdash_{\mathrm{T}} \neg(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q})$

h) $\neg(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}) \vdash_{\mathrm{T}} \neg \mathsf{P} \vee \neg \mathsf{Q}$

i) $\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}, \neg \mathsf{P} \vdash_{\mathrm{T}} \mathsf{Q}$

j) $\vdash_{\mathrm{T}} \neg(\mathsf{P} \wedge \neg \mathsf{P})$

k) $\vdash_{\mathrm{T}} \mathsf{P} \vee \neg \mathsf{P}$

2 Beweisen Sie die folgenden Behauptungen!

a) $\mathsf{R}(\mathsf{a}, \mathsf{b}), \neg \mathsf{R}(\mathsf{a}, \mathsf{c}) \vdash \mathsf{b} \neq \mathsf{c}$

b) $\mathsf{c} = \mathsf{d} \vdash \mathsf{d} = \mathsf{c}$

c) $\mathsf{a} = \mathsf{b}, \mathsf{b} = \mathsf{c} \vdash \mathsf{a} = \mathsf{c}$

3 Beweisen Sie die folgenden Behauptungen!

a) $\forall \mathsf{x}\, (\mathsf{A}(\mathsf{x}) \leftrightarrow \mathsf{B}(\mathsf{x})), \exists \mathsf{x}\, \mathsf{A}(\mathsf{x}) \vdash \exists \mathsf{x}\, \mathsf{B}(\mathsf{x})$

b) $\vdash \neg \exists \mathsf{y}\, \forall \mathsf{x}\, (\mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \leftrightarrow \neg \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{x}))$

c) $\vdash \exists \mathsf{x}\, (\mathsf{A}(\mathsf{x}) \vee \mathsf{B}(\mathsf{x})) \leftrightarrow \exists \mathsf{x}\, \mathsf{A}(\mathsf{x}) \vee \exists \mathsf{x}\, \mathsf{B}(\mathsf{x})$

d) $\forall \mathsf{x}\, (\mathsf{A}(\mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{B}(\mathsf{x})) \vdash \forall \mathsf{x}\, \mathsf{A}(\mathsf{x}) \rightarrow \forall \mathsf{x}\, \mathsf{B}(\mathsf{x})$

e) $\neg \exists \mathsf{x}\, \mathsf{A}(\mathsf{x}) \vdash \forall \mathsf{x}\, \neg \mathsf{B}(\mathsf{x})$

f) $\forall \mathsf{x}\, \forall \mathsf{y}\, \forall \mathsf{z}\, ((\mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \wedge \mathsf{R}(\mathsf{y}, \mathsf{z})) \rightarrow \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{z})), \forall \mathsf{x}\, \neg \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{x})$
$\vdash \forall \mathsf{x}\, \forall \mathsf{y}\, (\mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \rightarrow \neg \mathsf{R}(\mathsf{y}, \mathsf{x}))$

g) $\exists \mathsf{y}\, \forall \mathsf{x}\, \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \vdash \forall \mathsf{x}\, \exists \mathsf{y}\, \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$

4 Übersetzen Sie den folgenden Schluss in eine PL1-Sprache und leiten Sie die Konklusion ausgehend von den Prämissen mit Hilfe der Regeln von $\mathcal{F}$ her:
Jemand, der einen Schlüssel besitzt, hat die Unterlagen gestohlen.
Nur Kassierer oder Wachmänner besitzen einen Schlüssel.
Also hat ein Kassierer oder ein Wachmann die Unterlagen gestohlen.